

# Signatures tonales de Malik. Essai de généralisation.

27 fév. 2010

## Abstract

Une **signature tonale de Malik** est un ensemble de notes caractérisé par les deux conditions suivantes. (1) Cet ensemble appartient à **une** gamme unique. (2) Cet ensemble est minimal au sens ensembliste.

L'idée explorée ici est de généraliser cette définition en modifiant la condition (1), et chercher des ensembles de notes appelées **signature tonales de niveau 2** qui par exemple appartiennent à **deux** gammes uniques, et sont aussi minimaux. Dans ce cas on dit que **les deux gammes ont une signature commune**. Par exemple les notes **do,mi,fa,si** sont la "signature tonale de niveau 2" des gammes **Do majeur et La mineur harmonique**. Nous donnons la liste complète des signatures tonales de niveau 1 à 3.

En musique, l'utilité de ces signatures tonales de niveau 2 ou plus, pourrait être de marquer une ambiguïté tonale, ou pourraient servir à transiter entre deux gammes (ou plus).

## 1 Définitions des signatures tonales

On reprends les notations de Malik.

On considère les 12 notes en identifiant une octave à l'unison. Ainsi l'ensemble des notes distinctes est

$$N = \{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}$$

Comme l'a fait Malik, on considère les  $12 \times 3 = 36$  gammes de bases, **majeures** (ex: *CMaj* noté *MC* par Malik), **Mineures mélodiques** (ex: *Cmel* noté *mC* par M.) et **mineures harmoniques** (ex: *Cmh* noté aussi *hC*).

On note  $\mathcal{G}$  l'ensemble de toutes ces gammes.

**Definition 1.** Soit  $E$  un ensemble de notes. On note  $\mathcal{G}(E)$  l'ensemble des gammes auxquelles appartient  $E$ . Précisément:

$$\mathcal{G}(E) := \{G \in \mathcal{G}, \quad E \subset G\}$$

On appelle **niveau** de  $E$ , noté  $\text{niv}(E)$ , le nombre de ces gammes:

$$\text{niv}(E) = \#\mathcal{G}(E)$$

**Exemple:**

- $E = \{C, E, G, B\}$ . Alors  $E$  est contenu dans les gammes

$$\mathcal{G}(E) = \{CMaj, GMaj, Emh\}$$

(peut être plus encore?). Son niveau est donc 3.

- $E = \{C, E, F, G, B\}$  est de niveau 1, car contenu seulement dans *CMaj*.

### Remarques

- il est clair que si  $E' \subset E$  alors  $\mathcal{G}(E) \subset \mathcal{G}(E')$ , c'est à dire que si  $E'$  est un ensemble de notes de  $E$  alors  $E'$  appartient à un nombre égal ou plus grand de gammes.
- Beaucoup d'ensembles de notes sont de niveau 0, c'est à dire qu'ils n'appartiennent à aucune gamme ( $\mathcal{G}(E) = \emptyset$ ). Par exemple  $\{C, C\#, D\}$  est de niveau 0.

**Definition 2.** On dit que deux sous ensembles  $E, E'$  sont **équivalents** (notation  $E' \sim E$ ) si  $\mathcal{G}(E) = \mathcal{G}(E')$ .

### Remarques

- Si  $E \sim E'$  alors ils ont même niveau.
- d'après cette définition, tous les ensembles de niveau zéro sont équivalents.

**Exemple**  $\{C, D, E, F, G, A, B\}$  (la gamme *CMaj*) est équivalent à  $\{C, E, F, G, B\}$  (qui est sa signature tonale *MC*), et sont tous les deux des ensembles de niveau 1.

**Definition 3.** Un ensemble de notes  $E$  est une **signature tonale** (noté *ST*) s'il ne contient pas d'ensembles équivalents et plus petits (cad que  $E$  est minimal au sens ensembliste, dans sa classe d'équivalence). Le **niveau** de la signature tonale est le niveau de  $E$ .

### Remarques:

- Les signatures tonales de Malik sont des signatures tonales de niveau 1.
- La définition ci-dessus permet d'envisager des signatures tonales de niveau supérieur.
- Exemple extrême: une note seule, par exemple la note "si":  $E = \{B\}$  est clairement minimale dans sa classe d'équivalence. C'est donc une signature tonale de niveau 21 car elle appartient aux 21 gammes suivantes (et pas plus):  
doM reM miM solbM solM laM siM dom rem mim solbm labm lam sim doh mibh mih solbh labh lah sih

**Definition 4.** Soit  $E$  un ensemble de notes de niveau  $n \geq 1$ . On note  $ST(\overline{E})$  l'ensemble des signatures tonales dans sa classe d'équivalence, et  $ST(E)$  les signatures tonales contenues dans  $E$ .

**Definition 5.** Soient  $G_1, G_2, \dots, G_N \in \mathcal{G}$  un ensemble de  $N$  gammes et  $E = \cap_i G_i$  l'ensemble de leur notes communes. Si  $\mathcal{G}(E) = \{G_1, G_2, \dots, G_N\}$  alors on dit que **cet ensemble de gammes a une signature commune**.

### Exemples

- On considère les 2 gammes *CMaj* et *Cmel*. Alors leurs notes communes sont  $E = \{C, D, F, G, A, B\}$ . La signature commune est  $\{C, F, G, A, B\}$ .

## 2 Programme et résultats

Je mettrai le programme en pytohn... bientôt.

Voici les résultats:

# Signatures Tonales de niveau 1 à 3

7 mars 2010, programme python

The image displays five staves of musical notation, each representing a different tonal signature. The notation is in treble clef and uses a sequence of quarter notes. The signatures are as follows:

- Staff 1: MC, m1C, m2C, m3C, h1C, h2C, h3C
- Staff 2: MC-MF, MC-MG, MC-mC, MC-mD
- Staff 3: MC-hA, mC-mGb, mC-mE, hC-hEb, hC-hA
- Staff 4: MC-MF-mF, MC-MF-hA, MC-mC-hC, MC-mC-hA
- Staff 5: MC-mC-mD, mC-mAb-hC, mC-mD-hA, mC-hC-hE, mC-hC-hEb

The notation includes various key signatures (one flat, two flats, three flats, one sharp, two sharps) and time signatures (5/4, 3/4, 5/4).